



Il sistema di rating Elo nel Tennis Tavolo italiano

Allegato tecnico del regolamento di calcolo della classifica individuale

3 gennaio 2018

1 Struttura del sistema

Il sistema di rating ha come riferimento due periodi temporali che ne definiscono la struttura. Vi è il periodo annuale, da inizio Settembre a fine Giugno dell'anno successivo, durante il quale i giocatori disputano gli incontri, sia di campionato sia nei tornei, e guadagnano o perdono punti a seconda dei risultati.

All'inizio del periodo annuale viene definita una classifica iniziale dei giocatori (*CI*) che viene in seguito aggiornata alla fine di ogni mese in base ai risultati ottenuti negli incontri di quel mese. A fine anno, la classifica finale (*CF*) si ottiene applicando ulteriori regole al risultato dall'ultimo aggiornamento di fine Giugno.

Rispetto alla classifica, i giocatori possono essere in uno dei seguenti stati:

1. **classificato**: il giocatore è regolarmente inserito nella classifica mediante l'assegnazione di un punteggio che cambia durante l'anno per effetto degli incontri disputati.
2. **non classificato**: al giocatore viene inizialmente assegnato un punteggio provvisorio. Anche questo punteggio cambia durante l'anno per effetto degli incontri disputati, ma con regole differenti da quelle del punto precedente.

3. **fuori quadro**: il giocatore aveva un punteggio regolarmente assegnato (classificato), ma per un dato periodo non ha disputato incontri. Per ritornare in classifica deve disputare un certo numero di incontri.¹

Un giocatore non classificato (dunque con un punteggio provvisorio) diviene classificato alla fine di un dato mese se da inizio anno (Settembre) a quel mese disputa almeno **10** incontri con giocatori classificati e ne vince almeno **1**.

Per esempio, supponiamo che il giocatore Mario Rossi ad inizio anno risulti non classificato e gli venga quindi assegnato un punteggio provvisorio. Se alla fine di Dicembre ha disputato 9 incontri, con 1 vittoria, resta non classificato e il suo punteggio resta provvisorio. Se il mese successivo, alla fine cioè di Gennaio, il numero di incontri disputati sale a 12, in quel momento (e non alla fine del 10° incontro che cade all'interno di Gennaio) gli viene assegnato un punteggio definitivo. Ne segue che i punti relativi all'11-esimo e al 12-esimo incontro sono comunque da assegnare secondo le regole con cui si gestiscono i punteggi provvisori.

Se il punteggio di un giocatore resta provvisorio al termine del periodo annuale (fine Giugno), egli non viene inserito nella classifica finale e all'inizio dell'anno seguente il suo stato resta quello di non classificato, con punteggio iniziale che viene riassegnato e numero di incontri disputati/vinti azzerato.

E' prevista la normalizzazione della classifica finale CF in modo che i punti di ogni giocatore cadano nell'intervallo $[500 \dots 15000]$. Pertanto il primo classificato (o i primi classificati) avranno per definizione 15000 punti e l'ultimo (o gli ultimi) 500 punti.

1.1 Aggiornamento del rating in base ai risultati

L'aggiornamento della classifica avviene come si è detto alla fine di ogni mese. La formula considera la classifica all'inizio di quel mese e gli incontri che i giocatori hanno disputato in quel mese.

Per il giocatore A che ha disputato N incontri in un dato mese, contro gli avversari P_1, \dots, P_N la variazione di punti è data da:

$$R'_A = R_A + \sum_{m=1}^N \left[\gamma_m \cdot K \cdot (S_{A,P_m} - E_{A,P_m}) \right] + \beta \quad (1)$$

ove R_A è il rating di A ad inizio mese, R'_A il nuovo rating, γ_m l'opportuno coefficiente di peso per l'incontro m -esimo, K una costante che definiamo tra poco, $S_{A,P_m} \in \{0, 1\}$ un coefficiente che vale 1 se A vince contro P_m , 0 se perde e β la somma algebrica dei bonus/malus (ottenuti nei tornei).

Posto $B = P_m$, il termine $E_{A,B}$ è responsabile dei punti assegnati nel singolo incontro e il suo valore è dato dall'eq. (2):

¹I dettagli vanno oltre lo scopo di questo documento e sono da ricercare nel regolamento ufficiale.

$m < 4000$	$K = 160$
$4000 \leq m < 9000$	$K = 190$
$m \geq 9000$	$K = 220$

Tabella 1: fasce del K per giocatori classificati

$m < 6000$	$K = 300$
$m \geq 6000$	$K = 500$

Tabella 2: fasce del K per giocatori con punteggio provvisorio

$$E_{A,B}(R_A, R_B) = \frac{1}{1 + e^{(\rho_B R_B - \rho_A R_A)/\sigma}} \quad (2)$$

Nelle eq. (1) e (2) $\sigma = 750$, mentre K dipende dallo stato dei giocatori e dal loro punteggio. Le tabelle 1 e 2 riassumono la casistica rispettivamente per i giocatori classificati e provvisori.

In suddette tabelle $m = (\rho_A R_A + \rho_B R_B)/2$ è la media pesata del punteggio dei due giocatori; ρ_A e ρ_B sono infatti due coefficienti che rendono conto di eventuali incontri misti. In particolare, se A è di sesso femminile e B è di sesso maschile, allora $\rho_A = 0.7$ e $\rho_B = 1$. Se invece i giocatori sono dello stesso sesso, non c'è smorzamento: $\rho_A = \rho_B = 1$.

Notare che per ognuno dei due giocatori viene usato un K dipendente dal punto medio comune, ma dallo stato (classificato/provvisorio) individuale.

Posto allora $x = \rho_A R_A - \rho_B R_B$ la differenza di rating fra A e B , si possono definire due funzioni Ψ_1 e la Ψ_0 come segue:

$$\Psi_1(x) = K \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x/750}}\right) \quad (3)$$

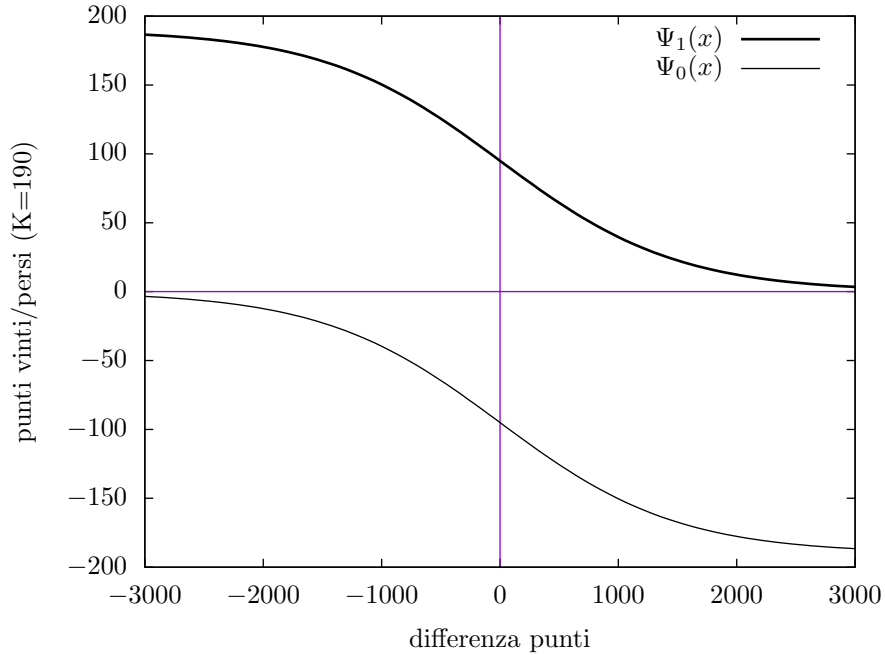
$$\Psi_0(x) = -K \cdot \frac{1}{1 + e^{-x/750}} \quad (4)$$

Esse rappresentano il numero di punti assegnati al giocatore A rispettivamente quando vince e quando perde l'incontro contro B .

Il grafico di fig.1.1 mostra i punti vinti e persi in funzione di x (per $K = 190$, fascia centrale della classifica).

Sia dal grafico di fig. 1.1, sia dalle definizioni stesse delle (3) e (4) si evincono importanti proprietà strutturali, valide a condizione che i giocatori siano entrambi classificati (o entrambi provvisori), anche se appartenenti a fasce differenti:

1. esistono un tetto massimo pari a K e un tetto minimo di 0, sia per i punti vinti, sia per i punti persi, qualunque sia il rating iniziale dei giocatori.



2. la quantità di punti guadagnati dal vincitore nel singolo incontro è identica a quella persa dall'avversario nello stesso incontro. La somma dei punti dei due giocatori prima e dopo l'incontro rimane quindi costante. I punti si trasferiscono dal perdente al vincitore, ma l'incontro in sè non genera punti dal nulla e nemmeno ne distrugge.
3. il termine $E_{A,B}$ definito nella (2) prende il nome di *valore atteso* e indica la probabilità (stimata) che il giocatore con rating iniziale $\rho_A R_A$ vinca contro $\rho_B R_B$. Da notare i tre casi interessanti: $\rho_A R_A \gg \rho_B R_B \rightarrow E_{A,B} \approx 1$, $\rho_A R_A \ll \rho_B R_B \rightarrow E_{A,B} \approx 0$ e infine $\rho_A R_A = \rho_B R_B \rightarrow E_{A,B} = 1/2$.
4. le due funzioni $\Psi_1(x)$ e $\Psi_0(x)$ sono continue in ogni loro punto, così come tutte le loro derivate di ordine $n \geq 1$. Questo permette di evitare punti di discontinuità o angolosi che potrebbero produrre squilibri nei valori di rating.
5. il sistema così definito, nel lungo termine è autoriparante. Anche supponendo che l'assegnazione del rating iniziale non sia accurata, il continuo disputare incontri, porta il rating a livellarsi su quelle che sono effettivamente le probabilità di vittoria di un giocatore rispetto a un dato avversario. Il sistema converge cioè verso l'equità.

6. durante l'anno è possibile che alcuni giocatori abbiano punteggi negativi. La normalizzazione di fine anno tuttavia previene questa casistica nella classifica finale CF .

1.2 Esempi di calcolo

Presentiamo qui alcuni esempi pratici per il calcolo della variazione di rating fra due giocatori.

1.2.1 Esempio

Il giocatore A con 8237 punti gioca e vince contro il giocatore B che ha 7912 punti. L'incontro ha peso unitario ed entrambi i giocatori sono dello stesso sesso e classificati. Di quanto varia il loro rating?

Peso unitario e stesso sesso implicano rispettivamente: $\gamma = 1$ e $\rho_A = \rho_B = 1$. La fascia è per entrambi i giocatori quella centrale ($4000 \leq m < 9000$) pertanto $K = 190$; la media dei punti sarebbe: $m = (8237 + 7912)/2 = 8074.5$, ma è inutile calcolarla poichè quando i due punteggi appartengono alla stessa fascia, tale è anche la loro media. La differenza punti è: $8237 - 7912 = 325$. Siccome A vince, la sua variazione di rating è data dalla $\gamma\Psi_1(325) = \Psi_1(325)$, quindi sostituendo nella (3) si ottiene:

$$\Delta_A = \Psi_1(325) = 190 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-325/750}}\right) \approx 190 \cdot (1 - 0.60667) = 74.7327 \quad (5)$$

Notare che nel calcolo dell'esponenziale conviene considerare almeno 5 decimali perchè il risultato va poi moltiplicato per K . Il giocatore B , essendo nello stesso stato di A (in questo caso, classificato) perde gli stessi punti.

E' tuttavia più corretto calcolare il valore sostituendo $x = -325$, cioè il valore di prima col segno cambiato perchè ora è riferito a B , nella eq. (4).

$$\Delta_B = \Psi_0(-325) = -190 \cdot \frac{1}{1 + e^{+325/750}} \approx -190 \cdot 0.39333 = -74.7327 \quad (6)$$

1.2.2 Esempio

Si consideri ora l'esempio precedente assumendo però che il punteggio del giocatore B sia provvisorio. Come cambia l'assegnazione dei punti?

Per il giocatore A si applica sempre l'eq. (5), con lo stesso $K = 190$ e quindi i punti non cambiano rispetto a prima. Col giocatore B invece si deve usare

$K = 500$ derivante dal fatto che la media dei punti è: $m = 8074.5 \geq 6000$. Sostituendo la differenza di punti nell'eq. (4) si ha:

$$\Delta_B = \Psi_0^*(-325) = -500 \cdot \frac{1}{1 + e^{+325/750}} \approx -500 \cdot 0.39333 = -196.665 \quad (7)$$

In questo caso la somma dei punti vinti e persi non è più zero come nel caso precedente perchè differente è lo stato dei due giocatori (uno classificato, l'altro provvisorio).

1.2.3 Esempio

Cosa succede invece se è B con punteggio provvisorio a vincere contro A classificato?

In questo caso la differenza è di -325 punti, pertanto si applica per B la (3) e per A la (4) ottenendo:

$$\Delta_B = \Psi_1^*(-325) = 500 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{+325/750}}\right) \approx 500 \cdot (1 - 0.39333) = 303.335 \quad (8)$$

e

$$\Delta_A = \Psi_0(325) = -190 \cdot \frac{1}{1 + e^{-325/750}} \approx -190 \cdot 0.60666 = -115.2654 \quad (9)$$

1.2.4 Esempio

Come varia l'esempio precedente se A è femmina e B è maschio?

In questo caso si pone: $\rho_A = 0.7$ e $\rho_B = 1$. Pertanto la media pesata: $m = 7912 - (0.7 \cdot 8237) = 6838.95$, mentre la differenza pesata di rating diviene: $7912 - (0.7 \cdot 8237) = 7912 - 5765.9 = +2146.1$ punti. Notare che lo smorzamento ρ_A trasforma la vittoria di B da inattesa ($x < 0$) ad attesa ($x > 0$). Poi si applica comunque per B la (3) e per A la (4) ottenendo:

$$\Delta_B = \Psi_1^*(2146.1) = 500 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-2146.1/750}}\right) \approx 500 \cdot (1 - 0.946) = 27 \quad (10)$$

e

$$\Delta_A = \Psi_0(2146.1) = -190 \cdot \frac{1}{1 + e^{2146.1/750}} \approx -190 \cdot 0.054 = -10.26 \quad (11)$$

1.2.5 Esempio

Supponiamo ora che sia A femmina, B maschio; entrambi classificati e vince A . Come si distribuiscono in questo caso i punti?

La situazione è analoga a quella presentata nel primo esempio. Cambiano solo media e differenza pesata dei punti che è come nell'esempio precedente; per il resto si applicano sempre la (3) e la (4) che danno:

$$\Delta_A = \Psi_1(-2146.1) = 190 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + e^{2146.1/750}}\right) \approx 179.723 \quad (12)$$

$$\Delta_B = \Psi_0(2146.1) = -190 \cdot \frac{1}{1 + e^{-2146.1/750}} \approx -179.723 \quad (13)$$

Notare che nonostante l'incontro sia misto, la quantità di punti vinta e persa è la stessa.

1.3 Tabella per calcolo manuale

E' possibile anche calcolare il guadagno/perdita punti in via approssimata con i valori in tabella 3. Stante l'esistenza di più valori di K possibili, il risultato è dato a meno di quest'ultimo. In altre parole, il valore riportato in tabella, va moltiplicato per il K opportuno.

Tabella 3: valori tabulati per la funzione Ψ_1

delta	Ψ_1/K	delta	Ψ_1/K	delta	Ψ_1/K	delta	Ψ_1/K
-3000	0.982014	-1500	0.880797	0	0.500000	1500	0.119203
-2980	0.981537	-1480	0.877969	20	0.493334	1520	0.116431
-2960	0.981047	-1460	0.875083	40	0.486670	1540	0.113716
-2940	0.980545	-1440	0.872138	60	0.480011	1560	0.111056
-2920	0.980030	-1420	0.869135	80	0.473359	1580	0.108451
-2900	0.979501	-1400	0.866072	100	0.466716	1600	0.105899
-2880	0.978959	-1380	0.862949	120	0.460085	1620	0.103400
-2860	0.978402	-1360	0.859764	140	0.453468	1640	0.100954
-2840	0.977832	-1340	0.856518	160	0.446868	1660	0.098560
-2820	0.977246	-1320	0.853210	180	0.440286	1680	0.096216
-2800	0.976645	-1300	0.849838	200	0.433726	1700	0.093921
-2780	0.976029	-1280	0.846403	220	0.427188	1720	0.091677
-2760	0.975398	-1260	0.842905	240	0.420676	1740	0.089480
-2740	0.974749	-1240	0.839341	260	0.414191	1760	0.087331
-2720	0.974085	-1220	0.835712	280	0.407736	1780	0.085229
-2700	0.973403	-1200	0.832018	300	0.401312	1800	0.083173
-2680	0.972704	-1180	0.828258	320	0.394923	1820	0.081162
-2660	0.971987	-1160	0.824432	340	0.388569	1840	0.079195

Continua alla pagina successiva

Tabella 3 – continua dalla pagina precedente

delta	Ψ_1/K	delta	Ψ_1/K	delta	Ψ_1/K	delta	Ψ_1/K
-2640	0.971252	-1140	0.820538	360	0.382252	1860	0.077272
-2620	0.970497	-1120	0.816578	380	0.375975	1880	0.075392
-2600	0.969724	-1100	0.812550	400	0.369740	1900	0.073554
-2580	0.968932	-1080	0.808455	420	0.363547	1920	0.071758
-2560	0.968119	-1060	0.804291	440	0.357400	1940	0.070001
-2540	0.967285	-1040	0.800060	460	0.351299	1960	0.068285
-2520	0.966431	-1020	0.795760	480	0.345247	1980	0.066608
-2500	0.965555	-1000	0.791391	500	0.339244	2000	0.064969
-2480	0.964657	-980	0.786955	520	0.333292	2020	0.063368
-2460	0.963736	-960	0.782450	540	0.327393	2040	0.061803
-2440	0.962793	-940	0.777876	560	0.321548	2060	0.060275
-2420	0.961826	-920	0.773235	580	0.315758	2080	0.058782
-2400	0.960834	-900	0.768525	600	0.310026	2100	0.057324
-2380	0.959818	-880	0.763747	620	0.304350	2120	0.055900
-2360	0.958777	-860	0.758902	640	0.298734	2140	0.054509
-2340	0.957710	-840	0.753989	660	0.293178	2160	0.053151
-2320	0.956617	-820	0.749009	680	0.287682	2180	0.051825
-2300	0.955497	-800	0.743962	700	0.282249	2200	0.050530
-2280	0.954349	-780	0.738850	720	0.276878	2220	0.049266
-2260	0.953173	-760	0.733672	740	0.271571	2240	0.048032
-2240	0.951968	-740	0.728429	760	0.266328	2260	0.046827
-2220	0.950734	-720	0.723122	780	0.261150	2280	0.045651
-2200	0.949470	-700	0.717751	800	0.256038	2300	0.044503
-2180	0.948175	-680	0.712318	820	0.250991	2320	0.043383
-2160	0.946849	-660	0.706822	840	0.246011	2340	0.042290
-2140	0.945491	-640	0.701266	860	0.241098	2360	0.041223
-2120	0.944100	-620	0.695650	880	0.236253	2380	0.040182
-2100	0.942676	-600	0.689974	900	0.231475	2400	0.039166
-2080	0.941218	-580	0.684242	920	0.226765	2420	0.038174
-2060	0.939725	-560	0.678452	940	0.222124	2440	0.037207
-2040	0.938197	-540	0.672607	960	0.217550	2460	0.036264
-2020	0.936632	-520	0.666708	980	0.213045	2480	0.035343
-2000	0.935031	-500	0.660756	1000	0.208609	2500	0.034445
-1980	0.933392	-480	0.654753	1020	0.204240	2520	0.033569
-1960	0.931715	-460	0.648701	1040	0.199940	2540	0.032715
-1940	0.929999	-440	0.642600	1060	0.195709	2560	0.031881
-1920	0.928242	-420	0.636453	1080	0.191545	2580	0.031068
-1900	0.926446	-400	0.630260	1100	0.187450	2600	0.030276
-1880	0.924608	-380	0.624025	1120	0.183422	2620	0.029503
-1860	0.922728	-360	0.617748	1140	0.179462	2640	0.028748
-1840	0.920805	-340	0.611431	1160	0.175568	2660	0.028013
-1820	0.918838	-320	0.605077	1180	0.171742	2680	0.027296
-1800	0.916827	-300	0.598688	1200	0.167982	2700	0.026597

Continua alla pagina successiva

Tabella 3 – continua dalla pagina precedente

delta	Ψ_1/K	delta	Ψ_1/K	delta	Ψ_1/K	delta	Ψ_1/K
-1780	0.914771	-280	0.592264	1220	0.164288	2720	0.025915
-1760	0.912669	-260	0.585809	1240	0.160659	2740	0.025251
-1740	0.910520	-240	0.579324	1260	0.157095	2760	0.024602
-1720	0.908323	-220	0.572812	1280	0.153597	2780	0.023971
-1700	0.906079	-200	0.566274	1300	0.150162	2800	0.023355
-1680	0.903784	-180	0.559714	1320	0.146790	2820	0.022754
-1660	0.901440	-160	0.553132	1340	0.143482	2840	0.022168
-1640	0.899046	-140	0.546532	1360	0.140236	2860	0.021598
-1620	0.896600	-120	0.539915	1380	0.137051	2880	0.021041
-1600	0.894101	-100	0.533284	1400	0.133928	2900	0.020499
-1580	0.891549	-80	0.526641	1420	0.130865	2920	0.019970
-1560	0.888944	-60	0.519989	1440	0.127862	2940	0.019455
-1540	0.886284	-40	0.513330	1460	0.124917	2960	0.018953
-1520	0.883569	-20	0.506666	1480	0.122031	2980	0.018463

In riferimento al primo esempio la tabella 3 ci aiuta ad approssimare la $\Psi_1(325)$ senza l'uso di una calcolatrice. Si può osservare infatti che la quantità di punti cade fra i valori tabulati: $\Psi_1(320)/K = 0.394923$ e $\Psi_1(340)/K = 0.388569$; moltiplicando per $K = 190$ si ottengono i due estremi 75.03537 e 73.82811 in accordo col valore 74.7327 calcolato utilizzando la formula esplicita.